数理解析研究所講究録
684巻 1989年 63-70



# Exact Cylindrical Soliton Solutions of The Sine-Gordon Equation, The Sinh-Gordon Equation and The Periodic Toda Equation

Akira NAKAMURA

Physics Laboratory, Osaka University of Foreign Studies,
Aomadani, Mino City, Osaka 562

Dec. 1988

( Abstract )

It has been known that the Toda lattice equation with periodic boundary condition generates the sinh-Gordon equation and the sine-Gordon equation. We apply this relation to the cylindrical soliton problem. Namely, we investigate the problem of the periodic generalizations of the cylindrical solitons of the Toda equation, which gives us the cylindrical soliton solutions of the sinh-Gordon equation and the sine-Gordon equation.

For the purpose, we first derive the (cylindrical) N-soliton solutions, $f_N$, of the Toda equation in the Hirota bilinear form. The constructed solutions are related to the Jacobi formula of the matrix algebra, and are different from the Wronskian type bilinear N-soliton solutions which are related to the Plücker relations.

For the Toda cylindrical soliton solutions $f_N$ (N=1, 2, ... ), we consider the one-soliton $f_1$ with the center at the lattice site n=a (a=constant), two-soliton $f_2$ at n=a and a+2, three-soliton $f_3$ at n=a, a+2, and a+4; ... ; N-soliton solution $f_N$ at n=a, a+2, a+4, ... ,a+2N-2. Then we take large N limit, $f_\infty$ , of the above solution $f_N$ which has centers at every lattice sites with step 2. The solution $f_\infty$ is periodic with period 2 or $f_n=f_{n+2}$ and gives solutions of the cylindrical sinh-Gordon and sine-Gordon equations.

## §1. Introduction

つぎの2次元 Toda lattice equation (≡ eq.) をかんがえる,

$$\Delta u_n - \exp(-u_n + u_{n-1}) + \exp(-u_{n+1} + u_n) = 0. \qquad (1.1)$$

ただし $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $n$ = lattice site integer である. ここで周期条件 $u_n = u_{n+2}$ (period=2) のとき, $u' = u_0 - u_1$ とおくと sinh-Gordon (≡ HSG) eq., $\Delta u' + 4\sinh u' = 0$ をえる. さらに $u' = iu''$ とおくと sine-Gordon (≡ SG) eq., $\Delta u'' + 4\sin u'' = 0$ をえる. だから periodic Toda eq. をとけば, HSG や SG eq. のこたえが, えられる. これを cylindrical soliton について, すれば, HSG や SG の cylindrical soliton solution がえられる. くわしい内容については, ref. 1) をみてください。

## §2. Bilinear N-soliton solution のあたらしい derivation

このセクションのくわしい内容は, ref. 2) をみてください. まずうえの準備として, bilinear N-soliton solution のあたらしい方法での derivation をかんがえる。

比較のために，2次元 Toda eq. (1.1) と KP eq.

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0, \qquad (2.1)$$

の両方をパラレルに，しるす。 Hirota の bilinear method にしたがって，dependent variable transformation $\exp(-u_n + u_{n-1}) - 1 = \Delta f(n)$ (for Toda eq.) or $u = (2\log f)_{xx}$ (for KP eq.) により，もとの式を bilinear eq. にすると，それらは，4つの linear operator でかかれた，つぎのかたちとなる。

$$f(L_a L_{a'} - L_b L_{b'})f - (L_a f)(L_{a'} f) + (L_b f)(L_{b'} f) = 0. \qquad (2.2)$$

これを "four-operators" bilinear form とよぼう。 ここで $L_a$, $L_{a'}$, $L_b$, $L_{b'}$ は具体的には，つぎのようになる。

$$L_a = \partial/\partial x + i\partial/\partial y\ (\equiv L_1), \quad L_{a'} = \partial/\partial x - i\partial/\partial y\ (\equiv L_{-1}),$$
$$L_b = \exp(\partial/\partial n) - 1, \quad L_{b'} = 1 - \exp(-\partial/\partial n), \quad \text{for Toda eq.} \qquad (2.3a)$$

$$L_a = 4(\partial^3/\partial x^3 - \partial/\partial t), \quad L_{a'} = 3\partial/\partial x, \ L_b = 3(\partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial y),$$
$$L_{b'} = 3(\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial y), \quad \text{for KP eq..} \qquad (2.3\,b)$$

N-soliton solution は, $f = \det(h_{ij})_{1\leq i,j\leq N} \equiv \det H$ であたえられ, N×N matrix H の element は

$$(H)_{ij} \equiv h_{ij} = c_{ij} + \sum_{m=-\infty}^{n} \varphi'_{m,i}\,\varphi_{m,j},$$
$$L_{\pm 1}\varphi_{m,i} = \mp\varphi_{m\pm 1,i},$$
$$L_{\pm 1}\varphi'_{m,i} = \pm\varphi'_{m\mp 1,i}, \qquad \text{for Toda eq.} \qquad (2.4\,a)$$

$$(H)_{ij} \equiv h_{ij} = c_{ij} + \int^x dx'\,\varphi'_i(x',y,t)\,\varphi_j(x',y,t),$$
$$L_a\varphi'_i = 0, \quad L_a\varphi_j = 0, \quad L_b\varphi_j = 0, \quad L_{b'}\varphi'_i = 0,$$
$$\text{for KP eq..} \qquad (2.4\,b)$$

ここで $c_{ij}$ = arbitrary constant である. このように, あたえられたN-soliton の $f$ について, $L_a f$, $L_{a'} f$, $L_b f$, $L_{b'} f$, $(L_a L_{a'} - L_b L_{b'})f$ をしらべると, おのおのの量は, すべて, ひとつのmatrix として, かかれることが, matrix identity をつかって, しめせる.[1,2] しかもそのとき (2.2) は, matrix algebra でしられている,

Jacobi formula の identity そのものになる。[1,2]
したがって，うえにあたえた N-soliton は，たしかに
solution となる。

§3. Wronskian type N-soliton とのかんけい。

いままで，bilinear method での N-soliton
solution は，Wronskian であらわされることが，しられていた。[3,4] Wronskian タイプの solution と，§2 のタイプの solution は，おなじ N-soliton solution であっても，ことなった表現方法で，かかれたものであり，それぞれの方法の便利さには，一長一短があると，いえる。[2]
とにかく Wronskian タイプの N-soliton solution 以外にも，いろいろな表現方法による N-soliton solution のかきかたが，あるという事実を，われわれは，ここで再認識する。
たとえば，§2 のタイプの $N\times N$ matrix でかかれる
N-soliton で，Wronskian タイプの $2N\times 2N$ matrix
でかかれるものに，対応するばあいが，ある。[2]

§4. $N\to\infty$ の limit による periodic solution のつくりかた。

§2 の N-soliton solution で，$c_{ij}=\delta_{ij}$

(クロネッカーのデルタ)ととり, $\varphi_j \to \epsilon\varphi_j$ とおき, determinant を $\epsilon$ で形式的に展開すると, つぎをえる.

$$f = \det H = 1 + \epsilon\sum_{i=1}^{N} g(i) + \epsilon^2 \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{N} g(i,j) + \epsilon^3 \sum_{\substack{i,j,h=1\\(i<j<h)}}^{N} g(i,j,h)$$

$$+\cdots,$$

$$g(i_1, i_2, \cdots, i_n) \equiv \begin{vmatrix} h^0(i_1,i_1) & \cdots & h^0(i_1,i_n) \\ \vdots & & \vdots \\ h^0(i_n,i_1) & \cdots & h^0(i_n,i_n) \end{vmatrix},$$

ただし $h^0(i,j)$ は, つぎで, あたえられる,

$$h^0(i,j) \equiv c_i\delta_{ij} + \sum_{m=-\infty}^{n} \varphi_{m,i}\varphi_{m,j}, \quad \text{for Toda eq.}$$

$$h^0(i,j) \equiv \int^x dx'\, \varphi_i(x',y,t)\,\varphi_j(x',y,t), \quad \text{for KP eq.}.$$

ここで，$N\to\infty$ なら summation のはんいを，かえて，$\sum_{1}^{n} \to \sum_{-\infty}^{\infty}$ とすればよい。 また periodicity を保障するためには，summation を，同一のものの（たとえば step 2 による）periodic な translation の和とすればよい。 くわしくは，ref. 1,2) をみてください。

§5. Summary.

HSG や SG eq. の cylindrical soliton を，よくしりたい，との問題意識から cylindrical Toda soliton の periodic 問題を，かんがえた。結論は，「Toda cylindrical soliton を周期的に無限にならべる」という，平凡なイメージに，おちついた。副産物として，Hirota bilinear method の N-soliton solution の，あたらしい，みちびきかたを，みつけたことも，ひとつの収穫であったといえよう。

references


1) A. NAKAMURA: J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 3309.

2) 〃 : 〃 58 (1989) No. 2 to appear.

3) N. C. Freeman and J. J. C. Nimmo: Phys. Lett. 95A (1983) 1.

4) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988) 59.